# Leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

## I) Groupe des permutations

### 1) Permutations, cycles et transpositions [ROM]

- Définition $\mathcal{S}(E)$
- Cas où deux ensembles sont en bijection
- Cardinal de $\mathcal{S}_n$
- Action de $\mathcal{S}_n$
- Définition d'un p-cycle et d'une transpo
- Ordre d'une permutation
- Conjugaison d'un p-cycle
- Théorème de Cayley

### 2) Support et orbite d'une permutation [ROM,ULM]

- Définition et propriétés du support
- Action d'une permutation et orbite
- Décomposition en produit de cycles à supports disjoints, lien avec orbites
- Type d'une permutation et lien avec l'ordre
- Deux permutations sont conjugués ssi elles ont le même type

### 3) Parties génératrices [ROM,ULM]

- Les transpositions engendrent $\mathcal{S}_n$ et exemples
- App : lemme de Schwarz

## II) Le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ [ROM,ULM]

### 1) Le morphisme signature

- Définition
- Signature d'une permutation
- Seul morphisme non trivial dans $\mathbb{C}^\times$

### 2) Eléments de structure de $\mathcal{A}_n$

- Définition de $\mathcal{A}_n$
- Cardinal de $\mathcal{A}_n$
- $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles
- Les 3-cycles sont conjugués dans $\mathcal{A}_n$ pour $n \geq 5$
- $\mathcal{A}_n$ simple pour $n \geq 5$
- Sous-groupes distingués de $S_n$

## III) Applications

### 1) Déterminant [ROM,BER]

- Formes n-linéaires alternées
- Définition et propriétés

### 2) Polynômes symétriques [GOU,BER]

- Polynômes symétriques comme points fixes de l'action de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$
- Polynômes symétriques élémentaires
- Relations coefficients racines
- Théorème fondamental et méthode de Waring
- Théorème de Kronecker

### 3) Nombre de dérangements de $\mathcal{S}_n$ [GOU]

- Nombre de dérangements et permutations aléatoires