Leçon 103 : Conjuguaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

I) Conjugaison, sous-groupes distingués

1) Action par conjugaison [ULM]

- Définition
- Définition classe de conjugaison
- Groupes conjugués
- Définition automorphisme intérieur

2) Sous-groupes distingués [BER,ULM]

- Définition
- Définition centre (ex : $Z(GL_n(\mathbb{R}))$
- Cas du groupé dérivé
- $Ker(f) \triangleleft G$
- Définition groupe simple (cas de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

II) Groupes quotients [ULM,BER]

- Définition groupe quotient et projection
- Importance d'avoir $H \triangleleft G$ pour que G/H soit un groupe
- Définition indice
- Tout sg d'indice 2 est distingué
- Sg distingué <–> noyau d'un morphisme
- Correspondance entre les sg de G contenant H, et les sg de G/H
- Groupe dérivé et abélianisé
- Théorème de factorisation
- Premier, deuxième (exemple pgcd) et troisième théorème d'isomorphisme
- Le quotient de groupes cyclique est cyclique
- Formule de Burnside
- Théorème de Dixon

III) Applications et exemples

1) Le groupe symétrique [SZP,BER,PER]

- Toute permutation s'écrit comme produit de cycles à supports disjoints
- Générateurs de $\mathcal{S}_n$
- Ordre d'une permutation
- Tous les cycles d'ordre k sont conjugués –> classes de conjuguaison
- Les 3-cycles sont conjugués dans $\mathcal{A}_n$ pour $n \geq 5$
- $\mathcal{A}_n$ simple pour $n \geq 5$
- Cor : $D(\mathcal{A}_n)$ et $D(\mathcal{S}_n)$
- Sous groupes distingués de $\mathcal{S}_n$

2) Groupe des isométries [PERR,GRI,NH2G2]

- Forme des éléments de $O_n(\mathbb{R})$
- $Z(O_n(\mathbb{R}))$ et $Z(SO_n(\mathbb{R}))$ [PERR]
- Les renversements sont conjugués dans $SO_3(\mathbb{R})$
- $SO_3(\mathbb{R})$ est simple

3) Réduction [ROM]

- Etre semblable
- Réduction de Jordan